Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

Решения Лиги стратегий. Второй тур.

1. Ответ: нет, такого графа не существует. Докажем, что количество недоминирующих непустых множеств вершин всегда четно, отсюда будет следовать требуемое. Будем считать, что два непустых недоминирующих множества A и B знакомы, если они не пересекаются и ни одно ребро графа не соединяет вершину из A с вершиной из B. Докажем, что степени всех вершин построенного графа нечетны, отсюда будет следовать, что в нем число вершин четно. Рассмотрим непустое недоминирующее множество A, пусть C — объединение множества A и всех вершин, смежных хотя бы с одной вершиной множества A. Так как множество A не является доминирующим, множество C не совпадает с множеством V всех вершин графа, и множество A знакомо в точности со всеми (непустыми) подмножествами множества $V \setminus C$, каковых нечетное число.

2. Обозначим через N середину отрезка BC.

Лемма. Точка N лежит на прямой XY.

Из лемммы следует, что $ND = ND'$, поэтому точка D' лежит на окружности, построенной на отрезке BC как на диаметре. Из симметрии следует, что $\angle(YD, ND) = \angle(ND', YD')$. Так как треугольник NDC равнобедренный, то $\angle(YD, ND) = \angle(NC, DC)$, поэтому $\angle(ND', YD') = \angle(NC, DC) = \angle(NC, YC)$, из чего следует, что Y, C, N и D' лежат на одной окружности. Ясно, что на этой же окружности лежит и точка M. Из этого следует, что $\angle(CM, D'M) = \angle(CY, D'Y)$. Так как треугольник CND равнобедренный, то $\angle(CY, D'Y) = 2\angle(YD, D'D)$ Так как прямые DD' и AM параллельны (они перпендиклярны прямой XY), то $\angle(YD, D'D) = \angle(CA, MA)$, поэтому $2\angle(YD, D'D) = 2\angle(CA, MA)$. Так как точки A, B, C и M лежат на одной окружности, то $\angle(CA, BA) = -\angle(BM, CM)$. Из вышенаписанных равенств следует, что $\angle(BM, CM) + \angle(CM, D'M) = 0$. Это означает, что точки B, M и D' лежат на одной прямой.

3. Индукция по n. Базу возьмем $n = 0$, тогда обе части равны $1 + 1/a_0$. Индукционный переход от $n-1$ к n. Обозначим $(1 + 1/a_0) \ldots (1 + 1/a_{n-1}) = M$. Тогда по индукционному предположению

$$\frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right) \leqslant M - 1,$$

так что достаточно доказать

$$1 + (M-1)\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leqslant M(1 + 1/a_n),$$

что равносильно неравенству $M \leqslant a_n/a_0$. Но это так:

$$M = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{a_0 + 1}{a_1} \cdot \frac{a_1 + 1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-2} + 1}{a_n - 1} \cdot (a_{n-1} + 1) \leqslant \frac{1}{a_0} \cdot (a_{n-1} + 1) \leqslant \frac{a_n}{a_0}.$$

4. Набор $a_i = i$ будем называть модельным. Количество разностей, равных степени в двойки, в модельном случае обозначим через $f(n)$. Решим сначала задачу, когда $a_i = i$ для $i = 1, 2, \ldots, k$ и $a_i = 2i - k$ для $i = k+1, \ldots, n$ (такую ситуацию будем называть k-специальной). Покрасим числа a_i с номерами от 1 до k в синий цвет, а с номерами от $k+1$ до n в красный. То же сделаем и в модельной ситуации. Заметим, что пар синих чисел, разность которых есть степень двойки, в k-специальной ситуации столько же, сколько в модельной. То же и с парами красных чисел (их разности для k-специальной ситуации ровно вдвое больше соответствующих разностей для модельной ситуации). Осталось разобраться со степенями двойки вида (красное минус синее). Заметим, что в k-специальной ситуации вычитаемое синее должно иметь ту же четность, что и k. Тогда мы можем заменить все красные и синие числа той же четности, что k, по формуле $x \to (x+k)/2$, разности станут вдвое меньше. Но теперь набор красных чисел в точности такой же, как в модельной ситуации, а набор синих — подмножество набора синих в модельной ситуации, откуда все и следует.

Перейдем к решению задачи. Вычтем из всех чисел a_1 и сократим на максимально возможную степень двойки, чтобы они оставались целыми. Свойство разности быть степенью двойки при таком преобразовании не меняется. Теперь в наборе есть как четные числа (0), так и нечетные (иначе можно еще сократить). Обозначим через m и $n - m$ количество четных и нечетных чисел в нашем наборе соответственно. Заметим, что разностей, равных 1, в наборе не больше, чем $2\min(m, n-m)$, а если $m = n - m$, то не больше, чем $2\min(m, n-m) - 1$. Все остальные степени двойки могут получаться лишь при вычитании чисел одной четности, так что общее количество степеней двойки не превосходит

$$f(m) + f(n-m) + 2\min(m, m-n) - \delta,$$

где $\delta = 1$ при $m = n - m$ и $\delta = 0$ в противном случае. Заметим, что равенство достигается, если как четные, так и нечетные числа заполняют начальный отрезок соотв. ряда четных натуральных чисел и ряда нечетных натуральных чисел (или не натуральных, а целых неотрицательных, если $m > n - m$). Но это получается некоторая специальная ситуация, разобранная выше.

5. Будем искать такие числа в виде m^k. Если $m^k = n^k + p$, где $p \in \mathbb{P}$, то $(m-n)(m^{k-1} + m^{k-2}n + \ldots + mn^{k-2} + n^{k-1}) = p$. Тогда $m - n = 1$, $m^{k-1} + \ldots + n^{k-1} = p$. Отсюда $m = n - 1$. Рассмотрим многочлен

$f(m) = m^{k-1} + m^{k-2}(m-1) + \ldots + m(m-1)^{k-2} + (m-1)^{k-1}$ и докажем, что существует бесконечно много чисел $m \in \mathbb{N}$ таких, что $f(m)$ — составное. Пусть $f(m_0) = M > 1$. Тогда для любого $m = Mx + m_0$, где $x \in \mathbb{N}$, $f(m) = f(Mx + m_0) \vdots M$, откуда и следует требуемое утверждение.

6. Ответ: могут. Положим $b_0 = 0$, $b_{n+1} = b_n^2 + 5b_n + 1$. Легко видеть, что $b_1 = 1$, $b_2 = 7$, $b_3 = 85$, и что b_6 не делится на 5^2, 7^2, 17^2 (это выясняется приведением последовательности по указанным модулям). Пусть p — простой делитель числа $b_6/(5 \cdot 7 \cdot 17)$, он отличен от 5, 7, 17 (на самом деле $p = b_6/(5 \cdot 7 \cdot 17) = 5766646632853$). По китайской теореме об остатках найдется натуральное число $c > p$, совпадающее с b_0 по модулю 7, с b_1 по модулю 5, с b_2 по модулю 17, с b_3 по модулю p. Тогда при $a_0 = c$ числа вида a_{2k}, a_{3k+2}, a_{3k+1}, a_{6k+3} будут делиться на 7, 5, 17 и p соответственно.

7. Ответ: $2^n - n$. Пример: по главной диагонали стоят 1, в прочих клетках нули. Тогда для перестановки π строк единицы на диагонали будут стоять на местах, соответствующих неподвижным точкам перестановки π. Заметим, что для любого подмножества $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, состоящего не из $n-1$ элемента, существует перестановка π чисел от 1 до n, у которой множество неподвижных точек совпадает с A (остальные точки можно переставить, например, по циклу). Таким образом, получается $2^n - n$ различных диагоналей.

Докажем, что всегда найдется хотя бы n диагоналей, которые получить перестановкой строк не удастся. Прежде всего заметим, что для каждой строки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ после любой перестановки строк для диагонали $(d_1, \ldots, d_n)$ найдется такой номер i, для которого $d_i = x_i$. Если имеется две одинаковых строки, то таких номеров найдется хотя бы 2, поэтому все n последовательностей длины n, совпадающие с x ровно в одном месте, не выписаны. Если же все строки различны, то все их дополнения (последовательности вида $(1 - x_1, \ldots, 1 - x_n)$) также различны, и все они не выписаны.

8. Выигрывает первый. Проигрышные позиции (находясь в которых, проигрываешь) — те, в которых минимальное число встречается хотя бы 6 раз, выигрышные — все остальные. Доказательства того, что из проигрышных ходы только в выигрышные, а из выигрышной есть ход в проигрышную, проводятся непосредственно.

9. Заметим, что если степень многочлена $f(x)$ равна l, то степень многочлена $g(x) = f(x+1) - f(x)$ в точности равна $l - 1$. Будем доказывать утверждение задачи индукцией по n. База для $n = 1$: если степень многочлена меньше 1, то он константа $p(x) = c$, тогда $|c - 1| < 1$ и $|c - t| < 1$ что невозможно если $t \geqslant 3$. Переход: Если $|p(k) - t^k| < 1$ и $|p(k+1) - t^{k+1}| < 1$ то $|p(k+1) - p(k) - (t^{k+1} - t^k)| < 2$, тогда $\left|\frac{p(k+1) - p(k)}{2(t-1)} - t^k\right| < 1$. Положим $p_1(x) = \frac{p(k+1) - p(k)}{2(t-1)}$, для него верно предположение индукции для k от 0 до $n-1$, а значит он степени не меньше чем $n-1$, тогда степень p не меньше чем n, ибо степень p ровно на 1 больше степени p_1.

10. Пусть P — общая середина отрезков KM и LN. Требуется доказать, что симедианы треугольников OKM и OLN, проведенные из O, лежат на одной прямой, то есть что прямая, симметричная OP относительно биссектрисы угла KOM совпадает с прямой, симметричной OP относительно угла LON. Но эти биссектрисы перпендикулярны, так как прямые OK, OL, OM, ON перпендикулярны прямым, содержащим стороны вписанного четырехугольника, которые составляют между собой равные углы.

Решения Лиги тактик. Второй тур.

1. Будем считать, для определённости, что в прямоугольнике $a \times b$ сторона a расположена вертикально, а сторона b горизонтально. Докажем по индукции, что при нечетном n такая солдаты не могут так перейти. База для прямоугольника 1×3 очевидна. Переход сделаем от $n-2$ к n. Пусть для нечетного n все получилось. Заметим тогда, что солдаты стоящие на крайней правой вертикальной стороне обязательно сделали ход влево, а солдаты, стоящие на крайней левой вертикальной стороне сделали ход вправо. Также ясно, что солдаты стоящие на верхней и нижней стороне (кроме угловых) сделали ход вверх и вниз соотвественно. Отсюда следует, что солдаты прямоугольника $(n-2) \times n$ (который получается из нашего прямоугольника выкидыванием каемки) должны встать в форме прямоугольника $n \times (n-2)$, что по предположению индукции невозможно. Заметим, кстати, что для четного n такая операция возможна.

2. Обозначим $\angle ACD = 2\alpha$. Тогда $\angle ACF = \alpha$ и $\angle ACB = 2\alpha$. Так как $\angle AFC = 90^\circ$ (AF — медиана равнобедренного треугольника), то четырехугольник $ABCF$ — вписанный (его противоположные углы прямые). Отсюда получаем $\angle FAC = \angle FBC = 90^\circ - \alpha$. Таким образом, в треуголнике LBC имеем $\angle BCL = 2\alpha$ и $\angle LBC = 90^\circ - \alpha$. Значит (так как сумма углов треугольника равна 180°) мы получаем, что $\angle BKC = 90^\circ - \alpha = \angle LBC$, откуда и следует, что $CB = CL$.

3. Заметим, что $2bc \leqslant b^2 + c^2$, откуда следует, что $a^2 + 2bc + d^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Отсюда имеем, что $\frac{a^2}{a^2+2bc+d^2} \geqslant \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Складывая четыре таких неравенства, получаем требуемое.

4. Рассмотрим два случая.

1) Пусть первый столбец покрашен так, что клетки разных цветов чередуются – 2 способа. Заметим, что в каждом из этих способов второй столбец может быть покрашен только двумя способами, а именно, чередующимися раскрасками. Поэтому для третьего столбца аналогично получаем тоже два варианта раскраски и т.д. Всего получается 2^8 раскрасок.

2) Клетки разных цветов в первом столбце не чередуются, следовательно, где-то рядом стоят две одноцветные клетки. Легко видеть, что тогда раскраска второго столбца определяется однозначно, при этом в нем снова будут стоять рядом две одноцветные клетки. Аналогично, однозначно определяется раскраска третьего столбца и т.д. То есть раскраска всей доски однозначно определяется раскраской первого столбца, а раскрасить первый столбец можно $2^8 - 2$ способами (выкинули две чередующиеся раскраски).
В итоге получается $2^8 + (2^8 - 2) = 2^9 - 2$ раскрасок.

5. Точки, принадлежащие выбранным отрезкам, будем называть покрашенными. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на 5 отрезочков длины $\frac{1}{5}$, а каждый из этих отрезочков пополам. Рассмотрим один из пяти отрезочков. Если его левую половину параллельно перенести вправо на расстояние $\frac{1}{10}$, то покрашенные точки правой половины и образа левой не пересекутся по условию. Это означает, что на каждом из пяти отрезочков покрашенные точки образуют отрезки суммарной длины не более $\frac{1}{10}$, а таких отрезочков – 5. Тем самым общая длины выбранных отрезков не превосходит $5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$.

6. Прибавим к обеим частям равенства 8 и получим: $(m^2-3)^2 = 7\cdot 2^n+8$. Если $n > 3$, то правая часть равенства содержит в каноническом разложении на простые множители двойку ровно в третьей степени, что противоречит тому, что она равна квадрату. Значит $n \leqslant 3$, откуда, перебирая случаи $n = 1, 2, 3$ получаем решение $n = 2, m = 3$.

7. Рассмотрим все наборы по n сотрудников этой компании. Заметим, что их ровно C_{2n+1}^n, и каждый такой набор не может открыть некоторый замок. Если какие-то два разных набора не могут открыть один и тот же замок, то и объедение этих двух наборов (которое содержит уже не менее $n + 1$ сотрудников), тоже не может открыть этот же замок, что противоречит условию. Это означает, что каждому набору по n сотрудников соотвествует свой замок, что означает, что $k \geqslant C_{2n+1}^n$. Теперь покажем, что ровно C_{2n+1}^n замков можно. Для этого поставим в соответствие каждому набору по n сотрудников один замок. Выдадим сотруднику ключи от тех замков, которые не соотвествуют тем наборам по n сотрудников, в которых он состоит. Не сложно видеть, что полученный способ удовлетворяет всем условиям.

9. Если $x = 0$, то первое равенство означает, что $1 = 0$. Значит все числа x, y и z строго положительны. Из первого равенство имеем: $x^2 + xy = x^2y^2 + 1 \geqslant 2xy$, откуда $x^2 \geqslant xy$, что означает, в силу $x \neq 0$, что $x \geqslant y$. Аналогично из второго и третьего равенства имеем, что $y \geqslant z$ и $z \geqslant x$. Таким образом, мы получили, что $x \geqslant y \geqslant z \geqslant x$, откуда ясно, что $x = y = z$. Решая получившееся уравнение, получаем ответ: $x = y = z = 1$.

10. Обозначим через K точку пересечения отрезка AS с отрезком XY. Заметим, что $\angle AKP = \angle ASB = \angle ABP$. Первое равенство углов выполняется в силу параллельности, второе — угол между касательной и хордой. Отсюдая ясно, что точка K лежит на описанной окружности треугольника PAB. Теперь обозначим через L середину отрезка XY, а через O — центр окружности ω. Заметим, что $\angle OAP = \angle OBP = \angle OLP = 90°$, откуда получаем, что точка L тоже лежит на описанной окружности треугольника ABP. Это и доказывает, что точка K совпадает с точкой L.